
TD3 - LOIS ET MOMENTS

Lois usuelles

Exercice 1 (La loi uniforme)

Soit X une variable uniforme sur $[0, \pi]$ et $a \in [0, \pi]$.

- Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$. En déduire $\mathbb{V}(X)$.
- Calculer $\mathbb{E}(\sin(X))$ et $\mathbb{E}(\cos(X))$.
- Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \min\{X, a\}$?
- Admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
- Que vaut cette espérance si $a = 0$? $a = \pi$? Est-ce que vous auriez pu trouver ces deux résultats autrement ?

Exercice 2 (Opérations sur les variables à densité)

Soit X une variable à densité f_X .

- Montrer que $X + m$ est à densité et en déterminer une.
- Exprimer la moyenne et la variance de $X + m$ en fonction de celles de X .
- Montrer que σX est à densité et en déterminer une.
- Exprimer la moyenne et la variance de σX en fonction de celles de X .

Exercice 3 (Moments de la loi exponentielle)

On dit que X suit une loi exponentielle de paramètres λ , et on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, si X admet comme densité

$$\rho_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t).$$

- Montrer que ρ_X est une densité et déterminer la fonction de répartition F_X de X .
- Calculer la moyenne $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathbb{V}(X)$ de X .
- Calculer $\mathbb{E}(e^{X/2})$ lorsqu'elle existe.
- On pose $I_n = \mathbb{E}(X^n)$. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} .
- En déduire l'expression de $\mathbb{E}(X^n)$.

Exercice 4 (Moments de la loi normale)

On dit que X suit une loi normale de paramètres m et σ , et on note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, si X admet comme densité

$$\rho_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

a) Montrer que $\rho_X(t)$ est bien une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite, c.-à-d. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

b) Que valent $\mathbb{E}(X^{2n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$?

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \mathbb{E}(X^{2n})$. Montrer que $c_n = (2n-1)c_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire une formule explicite pour $\mathbb{E}(X^{2n})$.

Soit X une variable aléatoire normale de paramètres m et σ .

d) Quelle sont la moyenne et la variance de X ?

Exercice 5

a) Montrer que la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \mathbb{1}_{]-1,1[}(x),$$

définit une densité de probabilité sur \mathbb{R} .

b) Donner la fonction de répartition et l'espérance (si elle existe) d'une variable aléatoire X de densité f sur \mathbb{R} .

c) Comment simuler une telle variable aléatoire ?

d) Si T suit une loi de Cauchy, montrer que la variable aléatoire $Z = \frac{1-T^2}{1+T^2}$ a pour densité f . On rappelle que la loi de Cauchy a pour densité :

$$f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$$