TD2 - Variables aléatoires

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 (Contrôleur contre fraudeur)

Une compagnie de métro pratique les tarifs suivants. Le ticket donnant droit à un trajet coûte 1 € ; les amendes sont fixées à 20 € pour la première infraction constatée, 40 € pour la deuxième et 400 € pour la troisième. La probabilité p pour un voyageur d'être contrôlé au cours d'un trajet est supposée constante et connue de la seule compagnie ($0 < p < 1$). Un fraudeur décide de prendre systématiquement le métro sans payer jusqu'à la deuxième amende et d'arrêter alors de frauder. On note T le nombre de trajets effectués jusqu'à la deuxième amende (T est le numéro du trajet où le fraudeur est contrôlé pour la deuxième fois). On note $q = 1 - p$ la probabilité de faire un trajet sans contrôle.

a) Montrer que la loi de T est donnée par

$$\mathbb{P}(T = k) = (k-1)p^2 q^{k-2}, \quad k \geqslant 2.$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $\mathbb{P}(T > n)$.

c) Calculer numériquement $\mathbb{P}(T > 60)$ (pourquoi s'intéresse-t-on à cette quantité ?) lorsque $p = 1/10$ et lorsque $p = 1/20$.

d) Que représente $T - 60$? Quelle est la moyenne $\mathbb{E}(T - 60)$?

e) À partir de quelle valeur c du paramètre p le fraudeur est gagnan en moyenne ? Pour ce $p = c$ a-t-il plus de chances de gagner ou de perdre ?

Autour de la fonction de répartition

Exercice 2

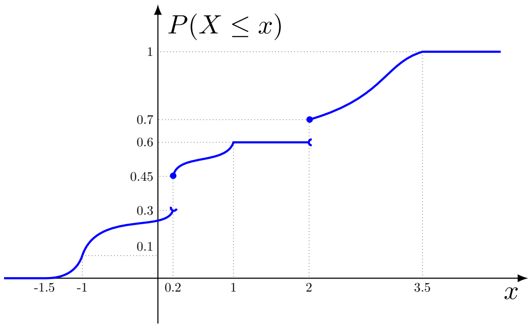
Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions de répartition d'une variable aléatoire réelle ?

$$F(x) = \sin(x), \quad G(x) = \frac{1}{\pi}\Big(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\Big), \quad H(x) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-1,0[}(x) + \frac{3}{4}\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x),$$

$$J(x) = \frac{1}{6}\Big(\mathbb{1}_{[1,2[}(x) + 2\,\mathbb{1}_{[2,3[}(x) + 3\,\mathbb{1}_{[3,4[}(x) + 4\,\mathbb{1}_{[4,5[}(x) + 5\,\mathbb{1}_{[5,6[}(x) + 6\,\mathbb{1}_{[6,+\infty[}(x)\Big).$$

Exercice 3 (Interprétation du graphique d'une f.d.r.)

La variable aléatoire X a pour fonction de répartition F représentée sur la figure



a) En exploitant les informations fournies par ce graphique, donner les valeurs des probabilités suivantes.

$$\mathbb{P}(X \leqslant -1), \quad \mathbb{P}(X = 0{,}2), \quad \mathbb{P}(X = 0{,}3), \quad \mathbb{P}(X \geqslant 0{,}2),$$
$$\mathbb{P}(X > 2), \quad \mathbb{P}(X \in [1; 1{,}5]), \quad \mathbb{P}(X \in [1; 2]), \quad \mathbb{P}(|X| > 1).$$

b) La variable aléatoire X est-elle à densité ?

c) Calculer la somme des sauts de F. La variable aléatoire X est-elle discrète ?

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y dans les cas suivants :

a) $Y = 1 - X$;

b) $Y = a + (b - a)X$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Exercice 5

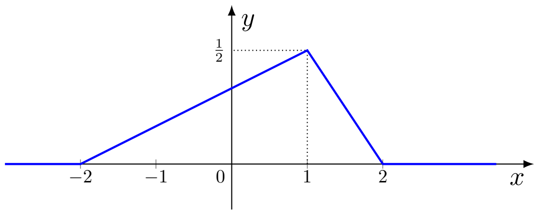
Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F_X. On pose $Z = \min(X, c)$ où c est un réel.

a) Calculer la fonction de répartition de Z.

b) Si la loi de X a pour densité f, est-ce que la loi de Z est encore à densité ?

Exercice 6 (Interprétation du graphique d'une densité)

La variable aléatoire X a pour densité la fonction f représentée sur la figure



a) En exploitant les informations fournies par ce graphique, donner les valeurs des probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X \leqslant -2), \quad \mathbb{P}(X = -1), \quad \mathbb{P}(X \in [-2; 0]),$$
$$\mathbb{P}(X > 1), \quad \mathbb{P}(X \geqslant 1), \quad \mathbb{P}(|X| > 1).$$

b) Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 7

Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F donnée par

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{avec} \quad f(t) = \begin{cases} 1+t & \text{si } t \in [-1, 0], \\ \alpha & \text{si } t \in]0, 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Représenter f.

b) Calculer F, et en déduire α.

c) Représenter F.

Exercice 8 (Apnée)

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'*apnée statique*, qui consiste à rester immobile immergé dans une piscine. Un individu « quelconque » va à la piscine, et s'entraîne à l'apnée. On appelle T la durée (en minutes) maximale d'apnée statique qu'il réalise [1]. On suppose que la loi de T est donnée par la fonction de répartition suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(T \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s, \quad \text{avec} \quad f(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0 \text{ ou } s \geqslant 10, \\ \lambda s(10-s) & \text{si } 0 \leqslant s < 10, \end{cases}$$

où λ est un réel strictement positif.

a) Donner l'allure du graphe de la fonction f.

1. Le record d'apnée statique est à 11'35" pour les hommes, 9'02"pour les femmes.

b) Calculer la fonction de répartition de T. En déduire λ.

Exercice 9 (Loi de Rayleigh)

Soit U une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$.

a) Rappeler la fonction de répartition F_U de U.

Soit σ un réel strictement positif, on définit une nouvelle variable aléatoire réelle, X, par

$$X = \sigma\sqrt{-2\ln U}.$$

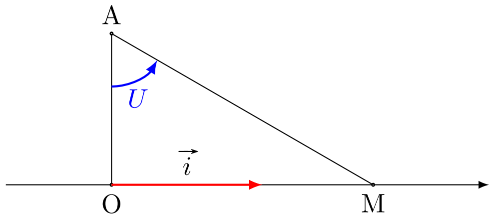
a) Calculer la fonction de répartition F_X de X.

b) La variable aléatoire X est-elle à densité ? Si oui, donner une densité de X.

c) Que peut-on en déduire sur la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} x\ \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}\ \mathrm{d}x$?

Exercice 10 (Un peu de trigonométrie aléatoire)

On définit une variable aléatoire X grâce à la construction représentée à la figure plus bas. L'angle $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM})$ a pour mesure en radians U, *variable aléatoire* de loi uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. La distance AO vaut 1 et X est l'abscisse du point M sur la droite de repère $(O, \vec{i}\,)$: $\overrightarrow{OM} = X\vec{i}$. Les angles sont orientés dans le sens trigonométrique, la figure est faite pour U positif. Pour $U = 0$, M coïncide avec le point O et pour $-\pi/2 < U < 0$, M est « à gauche » de O.



a) Exprimez X en fonction de U.

b) Pour x réel, calculez $\mathbb{P}(X \leqslant x)$. On obtient ainsi la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X.

c) Expliquez pourquoi la loi de X est à densité et calculez cette densité. Que reconnaissez vous ainsi ?

d) Quelle est la valeur de $\mathbb{P}(|X| \leqslant 1)$? Cette question peut se résoudre avec ou sans l'aide des précédentes.